oma se često iz kinetike sudara može izračunati masa, odnosno energija čestice. Isto tako zakoni sudara imaju bitnu ulogu u proračunu gubitka energije neutrona u materijalu (tzv. termalizaciji neutrona), pa su zato važna komponenta proračuna zaštite od neutrona i tzv. moderatora u reaktorima. Svakom fisijom jezgra urana nastane, naime, nekoliko neutrona koji i sami mogu da izazovu novu fisiju i tako nastave reakciju. Medjutim, da bi neutroni bili efikasni u cepanju jezgra urana treba ih usporiti, što se postiže uzastopnim sudarima u atomskim jezgrima. Materijal koji služi za usporavanje zove se moderator. Iz jednačina (39.3) i (39.4) proizilazi da će usporavanje neutrona biti efikasnije ako su jezgra materijala moderatora bliža po masi neutronima. U tom smislu najbolji moderator bio bi tečni vodonik jer jezgra vodonika, protoni, imaju gotovo istu masu kao neutroni. Kako je takav moderator praktično neizvediv, koristimo se vodom (H_2O) ili teškom vodom (D_2O), a vrlo često i grafitom (C). Važno svojstvo moderatora je, medjutim, da njegova jezgra ne apsorbuju neutrone; ovo svojstvo ne zavisi od kinematičkih svojstava moderatora.

X O S C I L A C I J E

Oscilatornim ili periodičnim kretanjem se nazivaju ona kretanja koja se po odredjenom pravilu ponavljaju tokom vremena. Oscilatorno kretanje se najčešće javlja kada se mehanički sistemi izvedu iz stanja stabilne ravnoteže. Telo koje se oscilatorno (periodično) kreće naziva se oscilator ili oscilatorni sistem. Ako se posle izvodjenja iz ravnotežnog položaja ovi sistemi izoluju od dejstva spoljašnjih sila, vršiće tzv. sopstvene oscilacije oko ravnotežnog položaja. Sistemi mogu da vrše i prinudne oscilacije pod dejstvom neke prinudne sile. Na realne oscilatorne sisteme uvek deluju sile trenja, pa oni vrše prigušeno (amortizovano) oscilovanje.

Svako oscilatorno kretanje se opisuje sledećim fizičkim veličinama:

PERIOD OSCILOVANJA T je vreme za koje telo izvrši jednu oscilaciju. To je vremenski interval koji protekne izmedju dva identična fizička stanja sistema.

FREKVENCIJA OSCILOVANJA ν ($\nu = 1/T$) je broj oscilacija u jedinici vremena.

KRUŽNA FREKVENCIJA ω je povezana sa frekvencijom i periodom oscilovanja relacijom $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$.

ELONGACIJA x je ma koje rastojanje tela od ravnotežnog položaja.

AMPLITUDOM A naziva se maksimalna elongacija. Stoga je ukupni domen kretanja 2A.

Opšti slučaj oscilatornog kretanja nije lako matematički interpretirati. Zbog toga u ovom odeljku analiziraćemo specijalnu vrstu oscilatornog kretanja koje se zove harmonijskim oscilovanjem. Kod harmonijskog oscilovanja promenljiva veličina menja se sa vremenom po zakonu sinusa ili kosinusa, koja se matematički najjednostavnije opisuje. Harmonijsko oscilovanje je veoma rasprostranjen oblik oscilovanja u prirodi.

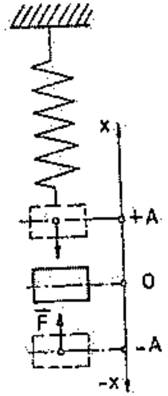
Kretanje ove vrste imamo približno ostvareno pri kretanju tela obešenog o jednu oprugu, u klaćenju jednog klatna male amplitude i u kretanju balansnog točka u časovniku. Vibracije žica i vazdušnih stubova muzičkih instrumenata su ili harmonijska ili superpozicija harmonijskih kretanja. Isto tako harmonijski osciluju i atomi u rešetki čvrstog tela, te električno i magnetno polje kod svetlosnih talasa.

Iz ovoga se vidi da će proučavanje harmonijskog kretanja dati osnovu za proučavanje i razumevanje različitih delova fizike. Zbog toga navešćemo nekoliko primera harmonijskog oscilovanja i oscilovanja bliskih harmonijskim.

41. PRIMERI HARMONIJSKIH OSCILACIJA

41.1. Oscilovanje tela obešenog o elastičnu oprugu

Oscilatorno kretanje može se javiti pod raznim okolnostima, ali je najčešći uzrok elastičnost tela. Kad se elastično telo deformiše javlja se elastična sila koja teži da vrati telo u prvobitni oblik, odnosno u ravnotežno stanje. Pod uticajem takvih sila i inercije tela javlja se oscilatorno kretanje. Primer za ovakvo kretanje je telo obešeno o spiralnu oprugu (sl. 41.1). U ravnotežnom položaju je težina tela uravnotežena silom opruge. Kada se telo izvede iz ravnotežnog položaja, remeti se ravnoteža i javlja se sila koja teži da vrati telo u ravnotežni položaj. Pod uticajem ove sile telo se kreće



Sl. 41.1

ubrzano, pri čemu njegova potencijalna energija prelazi u kinetički. Kada telo dospe u ravnotežni položaj 0, prestaje dejstvo sile, ali usled inercije telo produžava kretanje i dalje nasuprot elastičnoj sili koja se javlja u suprotnom smeru i zausta-

vlja telo. Telo se dalje kreće usporeno do zaustavljanja, kada je kinetička energija opet prešla u potencijalnu (tačka A). Posle ovoga menja se smer kretanja i pod sličnim okolnostima telo opet dolazi u početni položaj, ako nema gubitaka energije. Od ovog položaja kretanje se ponavlja više puta i tako nastaje oscilacija. Postoje i mnoge druge okolnosti pod kojima mogu da nastanu oscilacije. No kod svih oscilacija može se uočiti da se javlja sila koja je uvek orijentisana ka ravnotežnom položaju i vraća sistem u ravnotežni položaj. U ravnotežnom položaju ova sila jednaka je nuli.

Ako ograničimo naša razmatranja na sabijanje i istezanje opruge, gde je deformacija jednostavno pomeranje napadne tačke sile, onda su sila i pomeranje povezani Hukovim zakonom (37.3)

$$\vec{F} = k\vec{x}$$

gde je k konstanta srazmernosti, koja se naziva konstantom sile i zavisi od elastičnih osobina materijala, x rastojanje (elongacija) ravnotežnog položaja, a F sila kojom se mora dejstvovati na elastično telo da bi se proizvelo pomeranje x. Stoga sila kojom elastična opruga vuče telo koje je za nju pričvršćeno ima oblik

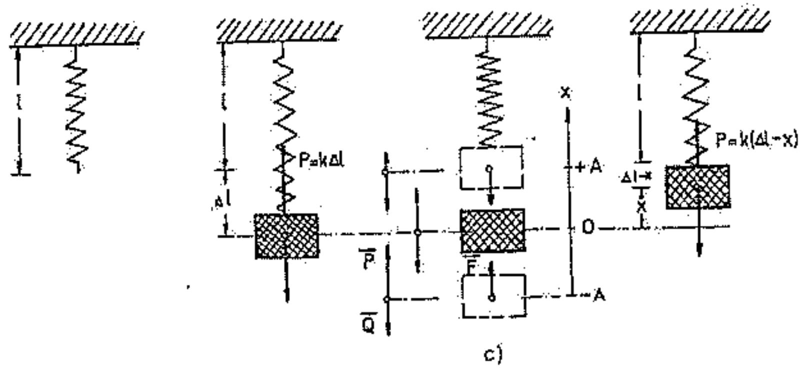
$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad (41.1)$$

i naziva se elastična ili restituciona sila. Znak minus u (41.1) pokazuje da vektor pomeraja $\vec{x}$ i restituciona sila $\vec{F}$ imaju isti pravac ali suprotan smer. Kada je telo ispod 0, $x<0$, sila je usmerena naviše pa je njena projekcija na x-osu $F > 0$. Kada je telo iznad 0, $x > 0$ sila F je usmerena naniže tako da je njena projekcija $F < 0$. Uvek kada na sistem deluje elastična sila čiji se intenzitet linearno povećava sa rastojanjem elastičnog sistema od ravnotežnog položaja $F(x) = -kx$ oscilovanje se naziva harmonijskim.

Posmatrajmo ponovo spiralnu oprugu čija je konstanta sile k i dužina bez opterećenja l (sl. 41.2.a). Kada na oprugu obesimo telo mase m opruga će se istegnuti za Δl i zaustaviti u položaju kada elastična restituciona sila $P = -k\Delta l$ uravnoteži težinu tela $Q = mg$ (sl. 41.2,b), tj. kada bude

$$mg = k\Delta l$$

Pošto je sila P suprotnog smera od Q njihova rezultanta $F = P-Q$



Sl. 41.2

jednaka je nuli, tako da će se telo nalaziti u ravnoteži i taj ravnotežni položaj obeležen je sa 0. Izvodjenjem tela iz ravnotežnog položaja naniže, težina Q ostaje ista a sila P se povećava tako da je rezultanta $F = P-Q$ usmerena ka ravnotežnom položaju. Izvodjenjem tela iz ravnotežnog položaja naviše sila P se smanjuje srazmerno pomeranju tako da je rezultanta sila F takodje usmerena ka ravnotežnom položaju (sl. 41.2.c). Pretpostavimo da se izvodjenjem tela iz ravnotežnog položaja telo nadje na rastojanju x iznad ravnotežnog položaja (sl. 41.2.d). Izduženje opruge sada je $\Delta l - x$. Sila P kojom opruga deluje na telo je $k(\Delta l - x)$ pa je rezultantna sila F koja dejstvuje na telo (zamenom $k\Delta l = mg$)

$$F = P - Q = k(\Delta l - x) - mg = -kx$$

Znači da je rezultantna sila koja deluje na telo elastična restituciona sila oblika (41.1) i srazmerna je pomeranju x tela

od njegovog ravnotežnog položaja. Sila F je centralna sila jer je stalno usmerena ka jednoj tački koja je ovde ravnotežni položaj. Ako se telo stavi u pokret duž ose x, ono će oscilovati sa kružnom frekvencijom ω. Jednačina kretanja tela duž ose x (sl. 41.2) je prema II Njutnovom zakonu

$$F = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

odnosno

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad (41.2)$$

Deobom (41.2) sa m i uvodjenjem da je $k/m = \omega_0^2$ dobija se jednačina

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (41.3)$$

Ova jednačina kretanja je homogena diferencijalna jednačina drugog reda. Može se dokazati da se rešenje ove jednačine može napisati u obliku

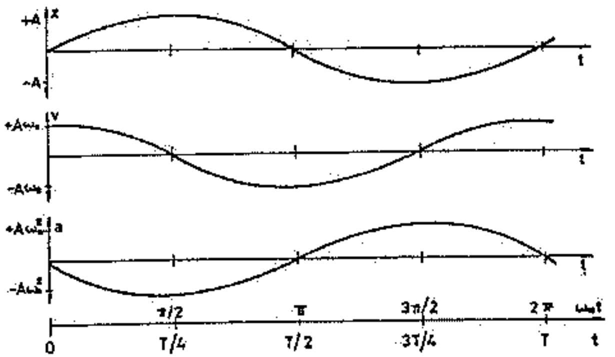
$$x = A\,sin(\omega_0 t + \alpha) \qquad (41.4)$$

gde početna faza α opisuje položaj sistema u trenutku $t = 0$. Ako nadjemo prvi i drugi izvod izraza (41.4), videćemo da rešenje (41.4) zadovoljava jednačinu (41.3).

$$\frac{dx}{dt} = v = A\omega_0\,cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad (41.5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -A\,\omega_0^2 sin(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 x \qquad (41.6)$$

Na slici 41.3. predstavljeni su uporedno grafikoni za elongaciju x (izraz 41.4), brzinu v (41.5) i ubrzanje a (41.6) kao funkcije vremena t (za fazu $\alpha = 0$). Sa slike 41.2. vidi se da je brzina kretanja oscilatora najveća kada sistem prolazi kroz ravnotežni položaj ($\omega_0 t = k\pi$; $k = 0, 1, 2, \ldots$), a ubrzanje kada je sistem u amplitudi (tačke +A i -A, sl. 41.1.) ($\omega_0 t = (2k+1)\pi/2$; $k = 0, 1, 2, \ldots$). Kako je kružna frekvencija data



Sl. 41.3

sa

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad i \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad (41.7)$$

to je period harmonijskog oscilovanja

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (41.8)$$

Jednačina (41.4) može da se napiše u obliku

$$x = A\, sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha\right) \qquad (41.9)$$

Rešenje (41.9) je opšte rešenje jednačine harmonijskog oscilatora. Svako telo koje vremenski osciluje po izrazu (41.9) zove se harmonijski oscilator. Jednačinu harmonijskog oscilovanja (41.2) možemo napisati u obliku

$$mv\,\frac{dv}{dx} + kx = 0 \qquad (41.10)$$

obzirom da je $\quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = v\,\dfrac{dv}{dx}$

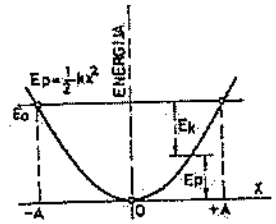
Integraljem izraza (41.10) dobijamo

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,kx^2 = const.$$

što zamenom izraza za x i v prema (41.4) i (41.5) daje

$$\frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,kx^2 = \frac{1}{2}\,mA^2\omega_0^2 = const. = E_0 \qquad (41.11)$$

Relacija (41.11) pokazuje da je zbir kinetičke i elastične potencijalne energije pri harmonijskom oscilovanju konstantan.

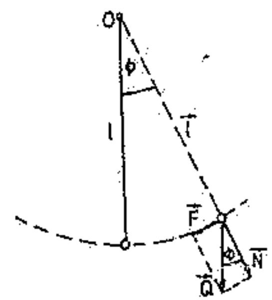


Sl. 41.4

Značenje relacije (41.11) može se videti sa slike 41.4. Parabolična kriva u dijagramu energije E i rastojanja x predstavlja potencijalnu energiju, a prava paralelna sa x osom na rastojanju E_0 predstavlja ukupnu energiju (konstantu u izrazu 41.11). Kretanje harmonijskog oscilatora ograničeno je na prostor izmedju pravih $E_0 = 0$ (ose x) i $E = E_0$, jer bi u protivnom sama potencijalna energija bila veća od ukupne. Telo koje harmonijski osciluje slično je dakle kretanju kuglice bez trenja po paraboličnom oluku visine E_0. Kao što bi kuglica neprestano ostala unutar tako odredjene realne jame, tako za telo koje harmonijski osciluje možemo kazati da se nalazi unutar potencijalne jame. Pojam potencijalne jame često se koristi u kvantnoj mehanici.

41.2. Matematičko klatno

Matematičko klatno je materijalna tačka koja se u polju Zemljine teže može kretati na stalnom rastojanju od date tačke (tačke oslonca) (sl. 41.5). Kretanje klatna se može shvatiti kao kretanje po kružnom luku, te će jednačina kretanja prema osnovnoj jednačini za rotaciju (28.6) biti



Sl. 41.5

$$M = I\alpha \qquad (41.12)$$

gde je $I = ml^2$ - moment inercije materijalne tačke u odnosu na osu koja prolazi kroz (0), a $\alpha = d^2\theta/dt^2$ - ugaono ubrzanje materijalne tačke. Kako sila $\vec{Q}$ ima krak $\vec{l}$ u odnosu na osu rotacije to je intenzitet momenta sile M jednak

$$M = |\vec{l} \times \vec{Q}| = lQ\ sin(2\pi - \phi) = - lQ\ sin\phi =$$
$$= - lmg\ sin\phi = - Fl \qquad (41.13)$$

pa se jednačina (41.12) može napisati kao

$$- lmg\ sin\phi = ml\ \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

ili

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\ sin\phi = 0 \qquad (41.14)$$

Ako je ϕ malo, tada je $sin\phi \approx \phi$, te jednačina (41.14) kretanja matematičkog klatna postaje

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2\phi = 0 \qquad (41.15)$$

gde je

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad (41.16)$$

Jednačina (41.15) identična je sa jednačinom (41.3) (s tom razlikom što se ovde pojavljuje ugao ϕ umesto rastojanja x). Opšte rešenje za elongaciju može se napisati slično (41.4)

$$\phi = \phi_0\ sin(\omega_0 t + \alpha) \qquad (41.17)$$

Kako je prema (41.7) $\omega_0 = 2\pi/T$ to zamenom ω_0 u (41.16) dobija se period oscilovanja matematičkog klatna

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (41.18)$$

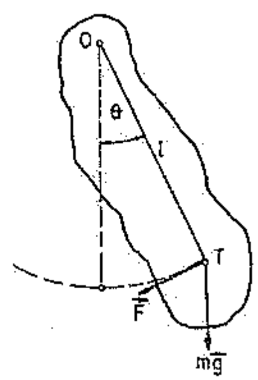
Izraz (41.18) pokazuje da period oscilovanja matematičkog klatna ne zavisi od mase materijalne tačke i da važi za male amplitude oscilovanja. Za proizvoljne amplitude oscilovanja kada se ne uzima aproksimacija $sin\phi \approx \phi$, već se rešenje jednačine (41.14) traži u obliku beskonačnog reda, dobija se

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\ sin^2\phi_0 + \frac{9}{64}\ sin^4\phi_0 + \ldots\right) \qquad (41.19)$$

gde je ϕ_0 maksimalna ugaona udaljenost (amplituda) od ravnotežnog položaja.

41.3. Fizičko klatno

Kruto telo proizvoljnog oblika koje se može slobodno okretati oko čvrste horizontalne ose predstavlja fizičko klatno. Kako se vidi sa slike 41.6., izvedemo li telo iz položaja ravnoteže, težina tela daje moment sile koji nastoji telo da vrati u položaj ravnoteže. Taj momenat jednak je



Sl. 41.6

$$M = - Fl = - mgl\ sin\theta \qquad (41.20)$$

gde je l udaljenost težišta od ose oko koje se telo okreće. Znak minus dolazi zbog toga što moment ima suprotan smer od smera u kome se meri ugao, tj. nastoji da smanji ugao θ. Ni ovde, kao ni kod matematičkog klatna, oscilovanje neće biti harmonijsko za proizvoljne amplitude. Medjutim, za male uglove je $sin\theta \approx \theta$, pa je moment sile

$$M = - mgl\theta \qquad (41.21)$$

Kako se kretanje klatna može shvatiti kao kretanje po kružnom luku, to je prema jednačini za rotaciju (28.6)

$$M = I\alpha = I\ \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (41.22)$$

Na osnovu (41.21) i (41.22) može se napisati

$$I\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = - mgl\theta \qquad (41.23)$$

ili

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad (41.24)$$

gde je

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I} \qquad (41.25)$$

Opšte rešenje jednačine (41.24) je identično sa (41.17)

$$\theta = \theta_0 sin(\omega_0 t + \alpha) \qquad (41.26)$$

Kako je prema (41.7) $\omega_0 = 2\pi/T$ to zamenom ω_0 u (41.25) dobija se period oscilovanja fizičkog klatna

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \qquad (41.27)$$

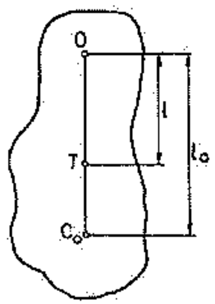
Uvek je moguće podesiti dužinu matematičkog klatna tako da ono ima isti period oscilacije sa fizičkim klatnom (sinhrona klatna). Tada je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

odakle je

$$l_0 = \frac{I}{ml} \qquad (41.28)$$

Dužina l_0 definisana izrazom (41.28) zove se redukovana dužina fizičkog klatna. Fizičko klatno ponaša se dakle kao matematičko klatno čija je celokupna masa skoncentrisana na udaljenosti l_0 od ose (sl. 41.7). Tačka C_0 na pravcu koji spaja osu oscilovanja O i težište T, a udaljena je l_0 od ose, zove se centar oscilacije fizičkog klatna. Osobina centra oscilacije je da telo, obešeno u toj tački, osciluje istim periodom kao i da je obešeno oko prvobitne ose.



Sl. 41.7

41.4. Torziono klatno

Torzionim klatnom se zove telo koje obešeno o elastičnu nit osciluje uvrtanjem niti. Moment elastične niti uvrnute za ugao ϕ je prema zakonu elastičnosti (38.5) u granicama deformacije

$$M = -c\phi \qquad (41.29)$$

gde je c – torziona konstanta žice i ona je prema (38.6) jednaka $c = \pi R^4 G/2l$, tj. zavisi od oblika i elastičnih osobina torzione žice. Kako je prema (28.6) $M = I\alpha = I(d^2\phi/dt^2)$ to se diferencijalna jednačina (41.29) može napisati

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2\phi = 0 \qquad (41.30)$$

gde je

$$\omega_0^2 = \frac{c}{I} \qquad (41.31)$$

pa su izrazi za elongaciju i period oscilovanja analogno (41.17) i (41.18)

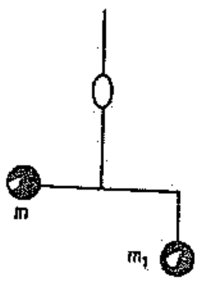
$$\phi = \phi_0 sin(\omega_0 t + \alpha); \; T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} \qquad (41.32)$$

Ako se na torziono klatno obesi telo nepravilnog oblika, iz perioda oscilovanja tog tela T i nekog pravilnog tela T_0, može se odrediti moment inercije nepravilnog tela I iz formule

$$I = I_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \qquad (41.33)$$

41.5. Primene klatna pri otkrivanju unutrašnjeg bogatstva Zemlje

Pored geografske širine i visine prema (22.40) na veličinu ubrzanja Zemljine teže utiče i zapreminska masa ($\rho = m/V$) Zemljine kore ili podzemnih slojeva na jednom mestu. Ako se ispod zemlje nalazi neka veća šupljina ili veća količina podzemne vode ili nafte, na tim mestima ubrzanje će biti manje nego u okolini. Obrnuto, naslage tela veće zapreminske mase od srednje zapreminske mase Zemljine kore ($\bar{\rho}_z = 5{,}5\cdot10^{-3}$ kg/m^3) povećavaju ubrzanje. Ubrzanje g se može veoma tačno odrediti pomoću matematičkog ili reverzibilnog klatna primenom izraza (41.18) i (41.27), tako da se i male razlike u vrednosti mogu lako zapaziti. To je našlo veće primene u ispitivanju bogatstva unutrašnjosti Zemlje: ruda, soli, nafte. Za konstatovanje lokalnih odstupanja ubrzanja upotrebljava se i Etvešova * vaga ili gravitacioni variometar. Na vrlo tankoj platinskoj žici visi laka šipka koja nosi na krajevima dva tega m i m_1 (sl. 41.8). Na mestima gde se ispod zemlje nalaze mase različitih zapreminskih masa, dejstvo Zemljine teže nije isto na obe mase, pa se usled toga javlja spreg koji uvrće žicu. Ugao za koliko je žica uvrnuta čita se pomoću lakog ogledala. Iz skretanja šipke može se odrediti veličina promene ubrzanja.



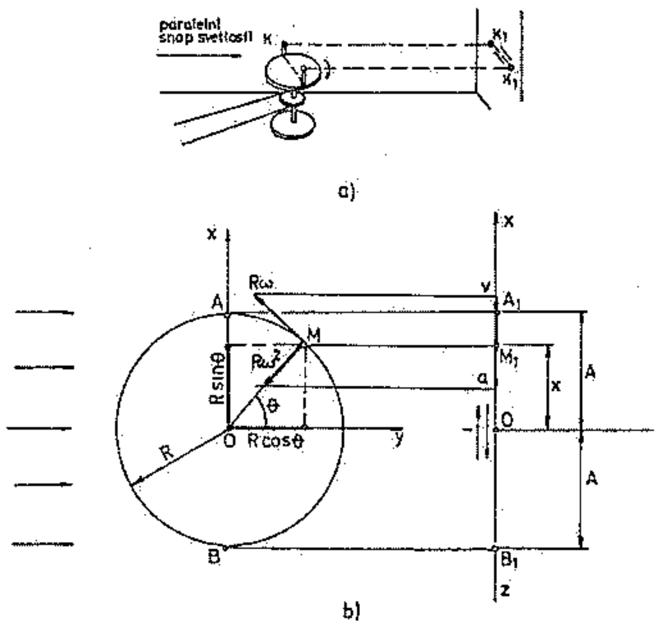
Sl. 41.8

42. VEZA IZMEDJU HARMONIJSKOG OSCILOVANJA I RAVNOMERNOG KRUŽNOG KRETANJA. GRAFIČKI PRIKAZ

Činjenica da se u izrazu za harmonijsko oscilovanje nalaze sinusne funkcije pokazuje da može postojati veza između harmonijskog i jednolikog kružnog kretanja. Naime, ako se tačka jednoliko kreće po kružnici brzinom v, njene projekcije po koordinatnim osama harmonijski osciluju. Da bi to bolje razumeli posmatrajmo kružnu ploču na kojoj je učvršćen štapić sa kuglicom K (sl. 42.1.a). Kada se ploča jednoliko okreće projekcija K_1 kuglice na zaklonu kreće se tamo-amo, tj. ona osciluje. Da bismo utvrdili da li je ovo oscilovanje možda harmonijsko poslužimo se sledećom geometrijskom interpretacijom. Neka tačka M kruži jednoliko po kružnici poluprečnika R (sl. 42.1.b). Njene projekcije po koordinatnim osama su $x = R\sin\theta$ i $y = R\cos\theta$. Projekcija materijalne tačke M na zaklonu Z osciluje gore-dole između tačaka A_1B_1. Dok se tačka M kreće po krugu njena projekcija M_1 na pravcu x izvodi oscilatorno kretanje koje treba da od-

* *Roland Eötvös, (1848–1919), madjarski fizičar*

govara prostom harmonijskom kretanju. Kada se izvrši jedan obrt



Sl. 42.1

za vreme od jednog perioda T, projekcija tačke izvršiće jedan titraj, tj. projekcija će se kretati od O do A_1, pa natrag do O, prema dole do B_1 i natrag do O.

Sada ćemo pokazati da su jednačine kretanja tačke M_1 iste kao i jednačine tela koje se prosto harmonijski kreće sa amplitudom A i kružnom frekvencijom ω. U ma kojem vremenu t, mereno od početka kada je tačka u O, pomeraj x će biti

$$x = R\sin\theta$$

Kako je kod jednolikog kretanja $\theta = \omega t$ i sa slike 42.1.b. R=A, to je

$$x = A\sin\omega t \qquad (42.1)$$

Tačka M ima periferu brzinu $R\omega$. Brzina v tačke M_1 odgovaraće projekciji vektora periferijske brzine $R\omega$ na pravac x, tj.

$$v = R\omega\, cos\omega t = A\omega\, cos\omega t \qquad (42.2)$$

Ubrzanje tačke M jeste njeno radijalno ubrzanje $R\omega^2$, a njegova projekcija na pravac x je ubrzanje koje odgovara tački M_1, tj.

$$a = -R\omega^2\, sin\omega t = -A\omega^2\, sin\omega t \qquad (42.3)$$

Znak minus u (42.3) dolazi zbog toga što je ubrzanje a uvek suprotnog smera od x. Zamenom x iz jednačine (42.1) u jednačinu (42.3) dobija se

$$a = -x\omega^2 \qquad (42.4)$$

Ubrzanje a definisano u (42.4) imaće i telo mase m koje osciluje na isti način kao i tačka M_1.

Sila koja izvodi oscilovanje je

$$F = ma = -m\omega^2 x \qquad (42.5)$$

Kako je m konstantno, a i ω ima konstantnu vrednost, tj.

$$m\omega^2 = k \qquad (42.6)$$

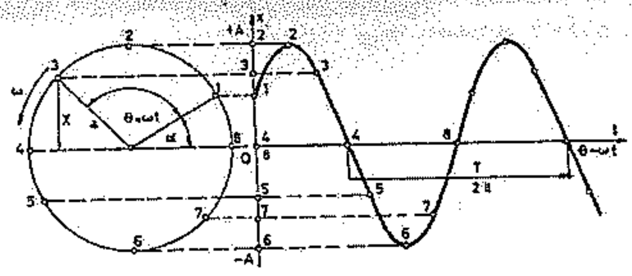
to relacija (42.6) dobija izgled

$$F = -kx \qquad (42.7)$$

što je identično sa (41.1) za prosto harmonijsko kretanje. Dobijeni obrasci (42.1), (42.2), (42.4) i (42.7) identični su sa (41.4), (41.5) i (41.6), te zaista imamo pravo da prosto harmonijsko kretanje predstavimo projekcijom stalnog kružnog kretanja.

Veza izmedju ravnomernog kružnog kretanja i harmonijskog oscilovanja može se prikazati i grafički. Materijalna tačka (sl. 42.2) se kreće ravnomerno po krugu (ω = const.) i njeni uzastopni položaji obeleženi su od 1-8. Projekcija ove tačke na pravac x, kao što smo videli, kreće se harmonijski po sinusnom zakonu, te je razumljivo da će grafikon ovakvog kretanja biti sinusoida (kosinusoida). Na slici 42.2. konstrui-

san je grafikon sinusne oscilacije $x = A\, sin(\omega t + \alpha)$ sa pomoć-



Sl. 42.2

nim krugom. Na apcisnu osu je naneseno vreme t, a na ordinatnu osu odgovarajuća elongacija x. Umesto vremena t na apcisnu osu se mogu nanositi uglovi θ, jer su oni proporcionalni vremenu ($\theta = \omega t$). Na grafikonu (sl. 42.1.c) su istovremeno naneseni i vreme t i ugao θ.

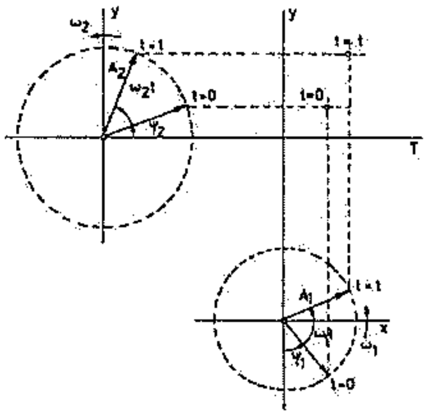
42.1. Superpozicija harmonijskih oscilacija. Lisažuove figure

U odeljku 42. videli smo da ako se tačka jednoliko kreće po kružnici brzinom v, njene projekcije po koordinatnim osama, $x = R\, sin\omega t$ i $y = R\, cos\omega t$, harmonijski osciluju sa istom amplitudom i frekvencijom. Postavlja se pitanje: kakvo se kretanje dobije ako materijalna tačka vrši istovremeno dva harmonijska oscilovanja. Ako su ta dva kretanja sinhrona, iste frekvencije i amplitude i medjusobno normalna, rezultanta kretanja biće onda kružnica. Medjutim, oscilovanja se mogu razlikovati u amplitudi i frekvenciji, a mogu imati bitnu razliku u fazi. Znači, imaćemo superpoziciju dve sasvim različite oscilacije

$$x = A_1 sin(\omega_1 t + \psi_1)$$

$$y = A_2 sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

Gornje jednačine grafički su predstavljene dijagramima na slici 42.3. Vertikalnim i horizontalnim projektovanjem odredjenog



Sl. 42.3

položaja čestice za x i y koordinatu može se odrediti položaj čestice u svakom vremenu. Dijagram (sl. 42.3) pokazuje njen položaj u vremenu t = 0 i u nekom proizvoljnom kasnijem vremenu t. Izgled rezultujuće krive zavisiće od odnosa amplituda i frekvencija, te o faznoj razlici. Po pravilu to su veoma komplikovane krive koje su poznate pod imenom *Lisažuove figure* *. To su putanje koje sledi čestica koja istovremeno osciluje u dva medjusobno normalna pravca.

Razmotrićemo neke najjednostavnije slučajeve:

a. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

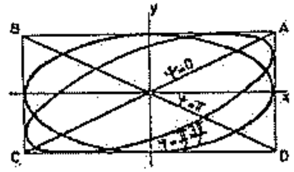
Tada je

$$x = A_1 \sin\omega t;\quad y = A_2 \sin(\omega t - \psi)$$

---

* *Jules Lissajous (1822-1880), francuski fizičar; proučavao je razlaganje složenih oscilatornih kretanja na jednostavna pomoću optičkih metoda.*

tj. amplitude i faze se razlikuju. Nekoliko karakterističnih figura za taj slučaj prikazano je na slici 42.4.



Sl. 42.4

Može se pokazati da su u tom slučaju Lisažuove krive uvek preseci kupe, tj. krive drugog reda. Ako naime krivu prikazanu gornjim parametarskim oblikom dovedemo u eksplicitni oblik, imaćemo

$$y = A_2\left(\frac{x}{A_1}\cos\psi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}\sin\psi\right)$$

odnosno

$$y^2 - \frac{2A_2}{A_1}xy\cos\psi + \frac{A_2^2}{A_1^2}x^2 = A_2^2$$

Gornja jednačina predstavlja elipsu čiji će ekscentricitet i nagib zavisiti od odnosa A_2/A_1 i od razlike faza ψ. Za $A_1 = A_2$ i $\psi = \pi/2$ dobije se kružnica, dok se za razlike u fazi $\psi = 0$ i $\psi = \pi$ dobijaju pravci čiji je nagib dat odnosom A_2/A_1.

b. $\omega_1 \neq \omega_2$.

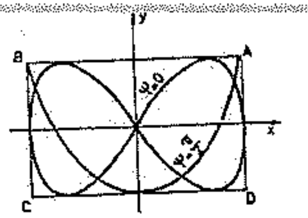
Znatno komplikovanije krive dobijaju se za odnose $\omega_1 : \omega_2 \neq 1$. Medjutim i tu postoje odredjena pravila pa se Lisažuove krive mogu upotrebiti za brzo odredjivanje nepoznatog odnosa dveju frekvencija ν_1 i ν_2 (odnosno ω_1 i ω_2). Nacrtamo li naime pravougaonik ABCD, u koji je ta kriva upisana (sl. 42.5), tada se taj odnos može izraziti iz broja dodira krive sa stranicama pravougaonika.

Ako kriva ima n_1 dodira sa stranicom AD (ili BC), a n_2 dodira sa stranicom AB (ili CD), tada je odnos frekvencija

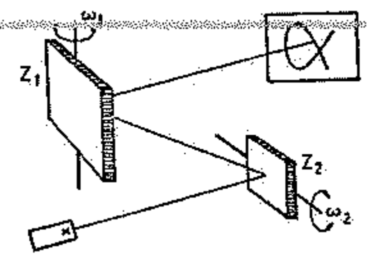
$$\nu_1 : \nu_2 = \omega_1 : \omega_2 = n_1 : n_2$$

Ta relacija važi za nedegenerisanu krivu, tj. za krivu bez šiljaka*. Ako kriva ima šiljke**, tada prebrojavanje treba načiniti tako da se dodiri računaju dvostruko, a šiljci samo jednom.

Najjednostavnije se demonstriraju Lisažuove krive katodnim osciloskopom. U tom slučaju dovodićemo naizmenične napone datih frekvencija na koordinatne ose osciloskopa i posmatrati rezultujuće kretanje svetleće tačke na ekranu. Vrlo jednostavan mehanički uredjaj za demonstraciju superpozicije harmonijskog oscilovanja je Pupov aparat. Taj uredjaj se sastoji od dva ogledala, Z_1 i Z_2, od kojih prvo može rotirati oko vertikalne ose, a drugo oko horizontalne. Neka ogledalo Z_1 miruje, a ogledalo Z_2 rotira oko ose kružnom frekvencijom ω_2 (sl. 42.6). Tada reflektovani zrak opisuje vertikalnu ravan. Ako pak ogledalo Z_2 miruje, a ogledalo Z_1 rotira oko (vertikalne) ose, tada zrak opisuje horizontalnu ravan. Ako oba ogledala osciluju kružnim frekvencijama ω_1 i ω_2, svetlosni zrak na zaklonu izvodi superponirano kretanje u obliku Lisažuove krive.



Sl. 42.5



Sl. 42.6

---

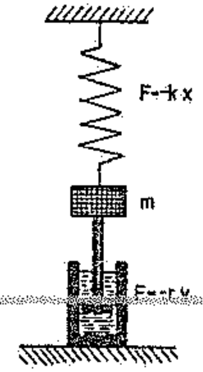
*Glatka kriva.

**Kriva sa prelomima.

43. PRIGUŠENE HARMONIJSKE OSCILACIJE

Do sada smo proučavali oscilovanje u idealnim uslovima, tj. kada nikakva sila (osim elastične) nije usporavala ni ubrzavala kretanje. Na svaki realni oscilatorni sistem deluje sila trenja koja koči kretanje i umanjuje energiju sistema tokom vremena. Prisustvo sile trenja smanjivaće amplitudu oscilovanja koja će postepeno opadati. Ovakvo oscilovanje naziva se prigušeno oscilovanje.

Jednostavan slučaj prigušenog oscilovanja prikazan je na slici 43.1., gde sila viskoznog trenja prigušuje oscilovanje. Ta sila je kod malih brzina proporcionalna brzini kretanja i suprotnog je smera od smera brzine



Sl. 43.1

$$\vec{F} = -r\vec{v} \qquad (43.1)$$

Ako se ograničimo na oscilovanje u smeru ose x, jednačina kretanja oscilatornog sistema će biti

$$-kx - rv = ma$$

odnosno

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (43.2)$$

Jednačina (43.2) razlikuje se od jednačine (41.2) pojavom dodatnog člana $r(dx/dt)$, od čije veličine zavisi i oblik rešenja. Ne ulazeći u matematičke detalje, razlikovaćemo tri slučaja:

1. malo prigušenje ($r < \sqrt{4km}$); telo i dalje osciluje sa nešto povećanim ali konstantnim periodom, pri čemu se amplitude neprestano smanjuju po eksponencijalnom zakonu

$$A = A_0\, e^{-\alpha t} \qquad (43.3)$$

što daje rešenje

$$x(t) = A_0\, e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \psi_1) \qquad (43.4)$$

gde je $\alpha = r/2m$, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$, a $\omega = \sqrt{k/m}$ je frekvencija neprigušenog oscilovanja (kvaziperiodično prigušenje);

2. kritično prigušenje ($r = \sqrt{4km}$); kretanje u tom slučaju prestaje biti periodično, elongacija se smanjuje eksponencijalno, a telo se vraća u ravnotežni položaj za najkraće vreme

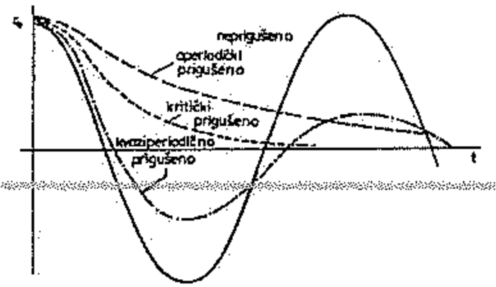
$$x(t) = (B_1 + B_2 t)\, e^{-\beta t} \qquad (43.5)$$

gde su B_1 i B_2 konstante;

3. aperiodično (neperiodično) prigušenje ($r > \sqrt{4km}$); u tom slučaju kretanje se eksponencijalno prigušuje po zakonu

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \qquad (43.6)$$

Sva tri slučaja prigušenog oscilovanja prikazana su na slici 43.2., zajedno sa neprigušenim sinusoidalnim oscilovanjem.



Sl. 43.2

44. PRINUDNE OSCILACIJE. REZONANCIJA

U delu 41. i 43. posmatrali smo oscilovanje pod dejstvom čiste elastične sile (harmonijsko oscilovanje), kao i kretanje u slučaju kada je ta sila modificirana trenjem ili nekom drugom silom što prigušuje oscilovanje. Sada ćemo posmatrati prinudno harmonijsko oscilovanje, tj. takvo oscilovanje kod ko-

jeg osim elastične sile postoji još jedna spoljašnja sila koja pojačava oscilovanje. Jednačina takvog oscilovanja će biti

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t) \qquad (44.1)$$

Sila F(t) može imati proizvoljnu periodičnu zavisnost od vremena. Jednostavnosti radi, pretpostavićemo da sila ima kosinusni karakter, tj. da se menja po zakonu

$$F(t) = F(0)\cos\omega t \qquad (44.2)$$

gde je kružna frekvencija ω po pravilu različita od vlastite frekvencije oscilatora date izrazom $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Rešenje jednačine (44.1) pretpostavićemo u obliku

$$x = A\cos\omega t \qquad (44.3)$$

Rešenje (44.3) ima jednostavan fizički smisao: materijalna tačka koja osciluje sledi u suštini delovanje sile F(t). Uvrstimo li izraz (44.3) u (44.1) dobijamo

$$-m\omega^2 A\cos\omega t = -m\omega_0^2 A\cos\omega t + F(0)\cos\omega t \qquad (44.4)$$

jer je $k = m\omega_0^2$. Jednačina (44.4) biće identično zadovoljena (za velike vrednosti t) ako je vrednost konstante A

$$A = \frac{F(0)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \qquad (44.5)$$

Vidimo da materijalna tačka m osciluje istom frekvencijom kojom se menja i periodična sila, ali sa modificiranom amplitudom datom izrazom (44.5). Vidimo da amplituda oscilovanja u ovom slučaju zavisi od razlike sopstvene frekvencije oscilatora ω_0 i frekvencije prinudne sile ω. Sa povećanjem ove razlike amplituda se smanjuje, a sa smanjenjem se povećava.

Posebno je zanimljiv slučaj kada je vlastita kružna frekvencija oscilatora $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ približno jednaka kružnoj frekvenciji ω prinudne periodične sile F(t). Tada imenilac izraza (44.5) postaje veoma mali. Za $\omega \to \omega_0$ amplituda prinudnog oscilovanja teži u beskonačnost. Taj se slučaj naziva *rezonancija* i mi ćemo ga zbog njegove važnosti detaljnije proučiti. Ako je dakle delovanje sile sinhrono sa frekvencijom oscilatora, amplituda će biti veoma velika. Ovaj slučaj možemo ilustrovati primerom dečije ljuljaške. Ako se ljuljaška gura u pogodnim trenucima tako da sila svaki put deluje u smeru kretanja, amplituda ljuljaške može dostići veoma velike vrednosti. U tom slučaju frekvencija delovanja sile je približno jednaka frekvenciji ljuljaške. Izraz (44.5) pokazuje da će za tačno jednake vrednosti ω i ω_0 amplituda oscilovanja postati beskonačna, što je naravno nemoguće. U realnom slučaju, uvek su prisutne sile trenja tako da jednačinu (44.1) treba proširiti članom za silu otpora proporcionalnom brzini $v = dx/dt$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F(0) \sin \omega t \qquad (44.6)$$

gde je r konstanta definisana u odeljku 43. Rešenje jednačine (44.6) može se napisati u obliku

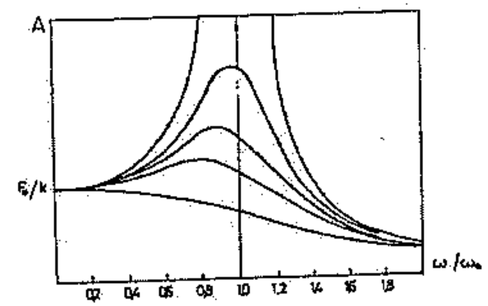
$$x = A \sin (\omega t - \psi)$$

gde je A amplituda data izrazom

$$A = \frac{F(0)}{\sqrt{r^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \qquad (44.7)$$

Vidimo dakle da se u realnom slučaju (sile trenja su prisutne) rezonantna amplituda, izraz (44.7), razlikuje od izraza (44.5) za član $r^2\omega^2$, koji se javlja u imeniocu. Na taj način rezonantna amplituda ne postaje neizmerno velika ni ako su ω i ω_0 medjusobno jednake. Na slici 44.1. dat je grafički prikaz zavisnosti amplitude rezonancije od odnosa frekvencije ω i ω_0 i od konstante prigušenja. Svakoj vrednosti konstante r odgovara jedna kriva iz familije na slici. Za slučaj bez prigušenja amplituda je za $\omega = \omega_0$ neizmerno velika (gornja kriva), dok za slučaj aperiodičnosti ($r > \sqrt{4km}$, donja kriva) nema uopšte rezonancije. Rezonantni procesi su poznati u svim oblastima fizike i opšta su pojava u prirodi, karakteristična za svaku osci-

latornu pojavu: zvuk, elektromagnetne pojave, kvantnomehaničke pojave u atomskoj i nuklearnoj fizici itd. Rezonancijom se ob-

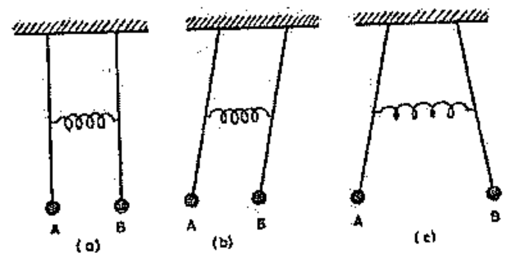


Sl. 44.1

jašnjavaju pojave i u mikro i u makro svetu. Rezonancija se, na primer, pojavljuje kod plime i oseke, emisije i prolaska infracrvenog zračenja kroz kristal, produkcije gama-zračenja apsorpcijom protona u atomskim jezgrima i konačno, kod medjudelovanja subnuklearnih elementarnih čestica. Rezonancija je dakle opšti fenomen, koji se javlja kod prirodnih pojava u svim dimenzijama.

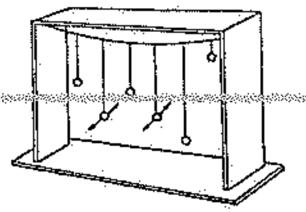
44.1. Prenos energije kod rezonancije

Poučan primer rezonantnog prenosa energije sa jednog tela na drugo pružaju vezana klatna prikazana na slici 44.2.



Sl. 44.2

Klatna su iste dužine i medjusobno su vezana elastičnom oprugom. Predpostavimo da se klatno A (sl. 44.2.a) drži u miru, a klatno B pomeri nadesno i zatim se oba klatna puste. Kako su klatna obešena o krute štapove umesto o niti, kretanje jednog klatna preneće se preko opruge na drugo. Znači na klatno A dejstvuje periodična prinudna sila čija je frekvencija vrlo bliska njegovoj prirodnoj frekvenciji. Tako klatno A počinje da osciluje sa postepenim povećanjem amplitude. Energiju potrebnu za ovo oscilovanje daje klatno B, tako da se amplituda klatna B postepeno smanjuje. U trenutku kada se B zaustavi, sva njegova energija preneta je na klatno A, koje sada ima amplitudu jednaku prvobitnoj amplitudi klatna B. Proces se dalje odvija u suprotnom smeru. Klatno A postepeno prenosi energiju na B sve dok klatno A ne stane. Tako imamo periodičnu razmenu, ili rezonantni prenos energije izmedju dva klatna. Bitan uslov rezonantnog prenosa energije sa jednog oscilatornog sistema na drugi je bliskost frekvencija. U to ćemo se lako uveriti sledećim eksperimentom. Na veliki stalak (sl.44.3) razapnimo nit na kojoj visi nekoliko klatna iste mase. Dužine klatna su različite, osim za dva klatna koja imaju jednake dužine. Na slici 44.3. to su drugo i četvrto klatno sleva. Zaljuljajmo drugo klatno. Videćemo da će se sva klatna pomaknuti iz položaja ravnoteže, jer se energija drugog klatna na sve njih postepeno prenosi. Nakon nekog vremena videćemo da osciluje samo četvrto klatno, a sva su se druga smirila pošto su kratko vreme nepravilno oscilovala. Znači da je klatno koje ima jednaku vlastitu frekvenciju kao što je ima i klatno koje ga je pobudilo na oscilovanje primilo najviše energije.



Sl. 44.3

Na razapetu nit (sl. 44.3) postavimo dva klatna jednake dužine, ali veoma različitih masa. Ako teže klatno zaljuljamo oscilovanje će se polako preneti na lakše, koje će postepeno tako jako zaoscilovati da će mu amplituda biti znatno veća od amplitude oscilovanja teškog klatna. Zaključujemo da je izmedju dva oscilatorna sistema došlo do veoma efikasne izmene energije. Kako je energija oscilovanja proporcionalna masi i kvadratu amplitude oscilovanja, to će lakše klatno svoju manju masu kompenzirati većom amplitudom oscilovanja. Da je bliskost frekvencija bitan uslov prelaska energije, možemo se uveriti ako sada, na primer, lakše klatno skratimo. Zaljuljamo li teže klatno, lakše će nakon nekog vremena zaoscilovati sasvim malom amplitudom i na kraju će se potpuno umiriti.

Drugi bitan uslov prelaska enrgije sa jednog sistema na drugi je njihova veza. Lako se vidi da će kod vezanih klatna prenos energije biti brži što je opruga čvršća, tj. što je njena konstanta k veća. Ta pojava nije vezana samo za klatna. Uopšte izmedju dva oscilatora bliske frekvencije prenosiće se energija sa jednog oscilatora na drugi. Taj će proces biti brži što je konstanta veze tih dvaju sistema veća. U primeru klatna sa slike 44.2. konstanta veze predstavljala je konstantu opruge; u slučaju klatna sa slike 44.3. veza je ostvarena elastičnošću niti.

44.2. Modulirano oscilovanje

Na primeru vezanih klatna pokazaćemo još jednu važnu pojavu u mehanici talasa, a to je medjudelovanje dva oscilatora bliske frekvencije. Posmatrajući klatna (sl. 44.2) možemo ustanoviti da postoje dva posebna načina kada se energija oscilovanja ne prenosi sa jednog klatna na drugo. Jedan je prikazan na slici 44.2.b., gde je klatnima dato jednako početno pomeranje u istom smeru. Opruga koja klatna povezuje nije istegnuta i ni jedno klatno ne dejstvuje silom na ono drugo. Period je isti kao i kod jednog jedinog klatna. Oba klatna osciluju sa istom fazom. Drugi način prikazan je na slici 44.2.c. kada su klatna dobila jednaka i suprotna pomeranja. Klatna sada osciluju suprotnom fazom, sa konstantnom amplitudom i sa periodom koji je nešto veći nego period klatna pod b. usled dodatne restitucione sile kojom dejstvuje opruga.

Ako uz vezana klatna postavimo matematičko klatno jednakog perioda oscilovanja kao svako od nevezanih klatna, uočićemo zanimljivu činjenicu. Pre svega, uporedimo li frekvenciju oscilovanja klatna pod b. i c. sa oscilovanjem kontrolnog klatna frekvencije ω, zapazićemo da je frekvencija ω_1 istofaznog oscilovanja nešto manja od kontrolne frekvencije ω, dok je frekvencija protivfaznog oscilovanja ω_2 nešto veća od ω, tj.

$$\omega_2 > \omega > \omega_1$$

Bilo koje oscilovanje vezanih klatna može se prikazati kao zbir dva osnovna oscilovanja frekvencije ω_1 i ω_2. Ako su amplitude tih oscilovanja jednake, a oscilovanje se odvija u smeru ose x, možemo pisati

$$x = x_1 + x_2 = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) =$$

$$= 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Dobijeni izraz za elongaciju složenog oscilovanja možemo opisati na ovaj način. Kada klatno izvodi istovremeno oba oscilovanja (ω_1 i ω_2), ono osciluje kružnom frekvencijom $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Kako su ω_1 i ω_2 veoma bliski, frekvencija ω je bliska onoj kojom slobodno osciluje svako od vezanih klatna. Tu smo činjenicu uočili ranije. S druge strane, amplituda tog oscilovanja se menja vrlo polagano sa vremenom po zakonu $A\cos((\omega_2 - \omega_1)/2)t$. Frekvencija te promene je veoma mala, jer su ω_1 i ω_2 bliski. Kažemo da klatno izvodi *modulirano oscilovanje*, gde je oscilovanje jednom osnovnom frekvencijom (visokom) modulirano promenljivom amplitudom niske frekvencije. U akustici se modulirano oscilovanje zvuka pod uticajem dva izvora bliske frekvencije naziva udarima.

XI MEHANIKA TEČNOSTI I GASOVA

Tečnosti i gasovi, kao tela koja mogu da "teku" jednim imenom se nazivaju fluidi. Za razliku od čvrstog tela koje ima stalan oblik i zapreminu, tečno telo ima odredjenu zapreminu, a oblik se formira prema obliku suda u kojem se nalazi, dok gasovito telo nema ni odredjen oblik niti zapreminu, već zauzima ceo prostor koji mu je ostavljen na raspolaganju. Iako se tečnosti i gasovi veoma mnogo razlikuju postoji niz osobina koje su zajedničke i za tečnosti i za gasove.

Mehanika fluida se može podeliti na hidromehaniku (koja proučava tečnosti) i aeromehaniku (koja proučava gasove). U zavisnosti od vrste kretanja mehanika fluida deli se na statiku i dinamiku. Statika proučava ravnotežu fluida, dok dinamika proučava njihovo kretanje pod dejstvom datih sila.

45. AGREGATNA STANJA

Čiste supstance se u prirodi javljaju u tri agregatna stanja: čvrstom, tečnom i gasovitom. Svako od ovih stanja karakteriše specifičan raspored atoma, odnosno molekula, što uslovljava njihove osobine. U čvrstom telu se javlja uredjenost višeg reda, jer je kinetička energija čestica (molekula, atoma ili jona) veoma mala. Privlačne sile izmedju čestica su znatno jače, čestice ne mogu da se kreću, već pravilno osciluju oko svojih strogo odredjenih položaja ravnoteže. Čvrste supstance se u prirodi javljaju kao kristalne sa tačno odredjenom unutrašnjom strukturom, i kao amorfne bez unutrašnje uredjenosti. Kod tečnosti, za razliku od čvrstih tela, atomi nemaju strogo odredjene položaje ravnoteže u prostoru, već se kreću jedan u odnosu na drugi, ali tako da je srednje rastojanje izmedju njih približno kao kod čvrstih tela. Gasovi se u prirodi nalaze u obliku dvo i više atomnih molekula (sem plemenitih gasova). Privlačne sile izmedju molekula gasa su neznatne, tako da su molekuli gasa praktično slobodni i kreću se u prostoru na velikom